BÀI TOÁN (ví dụ trang 5)

Tính tích phân đường

$$\int_C y\,dx + (x+6y)\,dy$$

trong đó C là một đường bất kỳ đi từ $A(1,0)$ đến $B(2,1)$.

Không cho phương trình đường C

BƯỚC 0 – Nhận diện loại bài (cực kỳ quan trọng)

Biểu thức có dạng:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$

$\rightarrow$ Đây là tích phân đường loại 2.
Nhưng:

- Không cho phương trình đường
- Không tham số hóa được

Chỉ còn 1 con đường hợp lý: kiểm tra xem có dùng Newton–Leibniz (trường bảo toàn) được không.

BƯỚC 1 – Viết trường vectơ

So sánh với dạng chuẩn:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$

Ta xác định:

$$P(x,y) = y, \quad Q(x,y) = x + 6y$$

Trường vectơ:

$$\vec{F}(x,y) = (y,\, x+6y)$$

BƯỚC 2 – Kiểm tra điều kiện bảo toàn

Muốn dùng Newton–Leibniz, cần kiểm tra:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Tính từng đạo hàm:
Với $P = y$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Với $Q = x + 6y$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Kết luận:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Trường bảo toàn. $\Rightarrow$ Tồn tại hàm thế $f(x, y)$ sao cho:

$$\nabla f = \vec{F}$$

BƯỚC 3 – Tìm hàm thế $f(x, y)$

Theo định nghĩa:

$$\nabla f = (P, Q)$$

nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y \quad (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + 6y \quad (2) \end{cases}$$

BƯỚC 3.1 – Giải phương trình (1)

Phương trình:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y$$

Ý nghĩa: khi lấy đạo hàm của $f(x, y)$ theo x, kết quả ra y. Đảo chiều suy nghĩ: đạo hàm $\rightarrow$ nguyên hàm

$$f(x, y) = \int y \, dx$$

Vì đang tích phân theo x, y được coi là hằng số:

$$\int y \, dx = y \int dx = yx$$

Vì sao phải cộng thêm $D(y)$? Vì $\frac{\partial}{\partial x}(D(y)) = 0$. Mọi hàm chỉ phụ thuộc y đều biến mất khi đạo hàm theo x.

Nghiệm tổng quát:

$$f(x, y) = xy + D(y)$$

BƯỚC 3.2 – Dùng phương trình (2) để tìm $D(y)$

Nhắc lại phương trình (2):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 6y$$

Lấy đạo hàm theo y của $f(x, y) = xy + D(y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x, \quad \frac{d}{dy}D(y) = D'(y)$$

Do đó:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + D'(y)$$

So sánh với đề bài:

$$x + D'(y) = x + 6y \quad \Rightarrow \quad D'(y) = 6y$$

Giải tích phân:

$$D(y) = \int 6y\,dy = 3y^2 + C$$

Bỏ C (không ảnh hưởng tích phân đường).
Hàm thế hoàn chỉnh:

$$f(x, y) = xy + 3y^2$$

BƯỚC 4 – Áp dụng Newton–Leibniz

Công thức:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = f(B) - f(A)$$

Tính tại điểm cuối $B(2, 1)$:

$$f(2, 1) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = 2 + 3 = 5$$

Tính tại điểm đầu $A(1, 0)$:

$$f(1, 0) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 = 0$$

Trừ:

$$\int_C y\,dx + (x + 6y)\,dy = 5 - 0 = 5$$

KẾT LUẬN CUỐI CÙNG

$$\int_C y\,dx + (x + 6y)\,dy = 5$$

BÀI TOÁN (ví dụ trang 8)

Cho trường lực:

$$\vec{F}(x, y, z) = (2,\ 3y,\ 4z^2)$$

Vật chuyển động từ:

$$A(1, 1, 1) \quad \text{đến} \quad B(1, 0, 0)$$

Yêu cầu: Tính công của lực:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

BƯỚC 0 – Nhận diện bài toán

Đây là tích phân đường loại 2 trong không gian (3D).

Dạng tổng quát:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Trong đó:

$$P = 2, \quad Q = 3y, \quad R = 4z^2$$

Đề không cho đường đi C. Phản xạ đúng: kiểm tra xem trường có bảo toàn không → dùng Newton–Leibniz 3D.

BƯỚC 1 – Viết lại tích phân dưới dạng chuẩn

Từ:

$$\vec{F} = (2, 3y, 4z^2)$$

Ta có:

$$W = \int_C 2\,dx + 3y\,dy + 4z^2\,dz$$

BƯỚC 2 – Kiểm tra trường có bảo toàn không

Điều kiện trường bảo toàn trong $\mathbb{R}^3$: Một trường $\vec{F} = (P, Q, R)$ là bảo toàn nếu:

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$$

Tức là:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Tính từng đạo hàm:
- Cặp 1: $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial(4z^2)}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial(3y)}{\partial z} = 0$. Bằng nhau.
- Cặp 2: $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial(2)}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial(4z^2)}{\partial x} = 0$. Bằng nhau.
- Cặp 3: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(3y)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(2)}{\partial y} = 0$. Bằng nhau.

Kết luận: $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$. $\Rightarrow$ Trường bảo toàn. $\Rightarrow$ Tồn tại hàm thế $\varphi(x, y, z)$ sao cho:

$$\nabla\varphi = \vec{F}$$

BƯỚC 3 – Tìm hàm thế $\varphi(x, y, z)$

Theo định nghĩa:

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = (2, 3y, 4z^2)$$

Tức là:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2 \quad (1) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3y \quad (2) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 4z^2 \quad (3) \end{cases}$$

BƯỚC 3.1 – Giải phương trình (1)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2$$

Tích phân theo x:

$$\varphi = \int 2\,dx = 2x + A(y,z)$$

BƯỚC 3.2 – Dùng phương trình (2)

$$\varphi = 2x + A(y,z)$$

Lấy đạo hàm theo y:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y}$$

Theo (2):

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 3y$$

Tích phân theo y:

$$A(y,z) = \int 3y\,dy = \frac{3}{2}y^2 + B(z)$$

BƯỚC 3.3 – Dùng phương trình (3)

$$\varphi = 2x + \frac{3}{2}y^2 + B(z)$$

Lấy đạo hàm theo z:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = B'(z)$$

Theo (3):

$$B'(z) = 4z^2$$

Tích phân:

$$B(z) = \int 4z^2\,dz = \frac{4}{3}z^3$$

Hàm thế cuối cùng

$$\varphi(x, y, z) = 2x + \frac{3}{2}y^2 + \frac{4}{3}z^3$$

BƯỚC 4 – Áp dụng Newton–Leibniz (3D)

Công thức:

$$W = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Tính tại điểm cuối $B(1, 0, 0)$:

$$\varphi(1, 0, 0) = 2 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 0^2 + \frac{4}{3} \cdot 0^3 = 2$$

Tính tại điểm đầu $A(1, 1, 1)$:

$$\varphi(1, 1, 1) = 2 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 + \frac{4}{3} \cdot 1^3 = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{29}{6}$$

Lấy hiệu:

$$W = 2 - \frac{29}{6} = -\frac{17}{6}$$

KẾT LUẬN CUỐI

$$W = -\frac{17}{6}$$

BƯỚC 3.2 – CỰC KỸ, CỰC CHẬM

Sau bước 3.1, ta có:

$$\varphi(x, y, z) = 2x + A(y, z)$$

Phần $2x$ đã xử lý xong. Phần $A(y, z)$ là toàn bộ phần còn thiếu, chỉ phụ thuộc y và z.

Đề cho:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3y$$

Do đó:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 3y$$

Giải tích phân:

$$A(y,z) = \int 3y\,dy = \frac{3}{2}y^2 + B(z)$$

BƯỚC 3.3 – CỰC KỸ, CỰC CHẬM

Ta có:

$$\varphi(x,y,z) = 2x + \frac{3}{2}y^2 + B(z)$$

Đề cho:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 4z^2$$

Do đó:

$$B'(z) = 4z^2$$

Giải tích phân:

$$B(z) = \int 4z^2\,dz = \frac{4}{3}z^3$$

TÓM TẮT ĐÚNG 5 DÒNG (HỌC THUỘC)

1. Không cho đường $\rightarrow$ nghĩ Newton–Leibniz
2. Kiểm tra bảo toàn
3. Tìm hàm thế (x $\rightarrow$ y $\rightarrow$ z)
4. Lấy điểm cuối trừ điểm đầu
5. Xong

VÍ DỤ TRANG 25 (PHẦN GREEN)

Tính tích phân đường:

$$\oint_C x^4\,dx + xy\,dy$$

trong đó C là đường biên của tam giác có các đỉnh:

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (0,1)$$

và C được định hướng tương thích với miền (ngược chiều kim đồng hồ).

BƯỚC 1. Nhận diện "dấu hiệu dùng Green"

Ta có tích phân dạng:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy$$

với:

$$P(x,y) = x^4, \quad Q(x,y) = xy$$

- C là đường kín
- Không cho tham số từng đoạn
- Miền D là miền phẳng đơn giản (tam giác)

$\Rightarrow$ Dùng định lý Green là con đường ngắn nhất.

BƯỚC 2. Xác định miền D

Miền D là tam giác vuông giới hạn bởi:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1 - x$$

Viết miền D theo dạng "đơn giản theo x":

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}$$

BƯỚC 3. Viết công thức Green

Định lý Green:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

BƯỚC 4. Tính các đạo hàm riêng

1. Tính $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$$Q(x,y) = xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y$$

2. Tính $\dfrac{\partial P}{\partial y}$

$$P(x,y) = x^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

BƯỚC 5. Lập tích phân kép

Thay vào công thức Green:

$$\oint_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D (y-0)\,dx\,dy = \iint_D y\,dx\,dy$$

BƯỚC 6. Viết tích phân kép có cận

Từ miền D:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} y\,dy\,dx$$

Nhớ kỹ:
Trong: tích phân theo y
Ngoài: tích phân theo x

BƯỚC 7. Tính tích phân (siêu chậm)

Bước 7.1: Tích phân trong theo y

$$\int_0^{1-x} y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

Bước 7.2: Tích phân ngoài theo x

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2x+x^2)\,dx$$

Tách từng phần:

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1\,dx - \int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 x^2\,dx\right)$$

Bước 7.3: Tính từng tích phân nhỏ

$$\int_0^1 1\,dx = 1, \quad \int_0^1 2x\,dx = 1, \quad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

Thay vào:

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

KẾT LUẬN CUỐI CÙNG

$$\oint_C x^4\,dx + xy\,dy = \frac{1}{6}$$

TÓM TẮT "NHÌN LÀ BIẾT GREEN"

- Dạng $Pdx + Qdy$
- C kín
- Miền D dễ mô tả
- Tính $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$
- Đổi sang tích phân kép → nhẹ não hơn đi từng cạnh

ĐỀ BÀI (trang 33)

Tính tích phân đường:

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$$

trong đó:
C là biên của miền D.
D nằm trong nửa trên mặt phẳng $y \geq 0$.
D nằm giữa hai đường tròn:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{và} \quad x^2 + y^2 = 4$$

Hướng của C tương thích với D (ngược chiều kim đồng hồ).

BƯỚC 1. Nhận diện vì sao gọi là "miền không đơn giản"

Miền D:
Không phải dạng:

$$a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x)$$

Cũng không phải dạng:

$$c \leq y \leq d, \quad h(y) \leq x \leq k(y)$$

Vì:
- Miền bị khoét rỗng ở giữa (giữa 2 đường tròn). - Lại chỉ lấy nửa trên.
$\Rightarrow$ Không phải miền đơn giản theo x hay y.
Nhưng vẫn dùng được Green vì:
- Miền có thể chia thành hữu hạn miền đơn giản. - Hoặc đổi sang tọa độ cực (cách thông minh hơn).

BƯỚC 2. Xác định P và Q

So với dạng chuẩn:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy$$

Ta có:

$$P(x,y) = y^2, \quad Q(x,y) = 3xy$$

BƯỚC 3. Viết công thức Green

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

BƯỚC 4. Tính đạo hàm riêng (làm chậm)

1. Tính $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$$Q(x,y) = 3xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y$$

2. Tính $\dfrac{\partial P}{\partial y}$

$$P(x,y) = y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

3. Lấy hiệu (linh hồn của Green):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3y - 2y = y$$

Toàn bộ bài toán rút gọn về:

$$\iint_D y\,dA$$

BƯỚC 5. Nhận diện miền D trong tọa độ cực

Miền D: - Giữa hai nửa hình tròn bán kính 1 và 2. - Nằm trên trục Ox.

Chuyển sang tọa độ cực:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Miền D trở thành:

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi\}$$

Nhớ:

$$dA = r\, dr\, d\theta$$

BƯỚC 6. Đổi tích phân sang tọa độ cực

Vì $y = r\sin\theta$, nên:

$$\iint_D y\, dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 (r\sin\theta) \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \int_1^2 r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta$$

BƯỚC 7. Tính tích phân – siêu chậm

Bước 7.1: Tách tích phân

$$= \left(\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\right) \left(\int_1^2 r^2\, dr\right)$$

Bước 7.2: Tính từng phần

a) Theo θ:

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

b) Theo r:

$$\int_1^2 r^2\, dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

Bước 7.3: Nhân lại

$$2 \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

KẾT LUẬN CUỐI CÙNG

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy = \frac{14}{3}$$